Segunda Prova 1º/2010

Thadeu Penna

25 de maio de 2010

2ª Prova

1 1ª Questão

Considere um gás de partículas clássicas que se movem apenas na superfície de uma esfera. Escreva a Hamiltoniana de uma partícula livre nestas condições, em função de p_θ e p_ϕ. Escreva a função partição de partícula única ζ. Encontre a energia média e a pressão de um gás de N partículas. (Dica: $\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\vec{z}$)

- A hamiltoniana pode ser escrita como

$$H = E = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}$$

- A função partição será

$$\zeta = \int e^{-\beta H} d\theta\, d\phi\, dp_\theta\, dp_\phi$$

- Para o cálculo de ζ temos duas integrais gaussianas em $dp_\theta\, dp_\phi$
-

$$\zeta = (2\pi mr^2/\beta)^{1/2} \int (2\pi mr^2 \sin^2\theta/\beta)^{1/2} d\theta d\phi = (2\pi mr^2/\beta) \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi m/\beta\, A$$

  onde A é a área da esfera.

- A energia média e a pressão serão

$$\overline{E} = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\zeta = NkT \qquad\qquad P = N\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial A}\ln\zeta = \frac{NkT}{A}$$

2 2ª Questão

Os níveis de energia de um rotor rígido, de momento de inércia I, em 3 dimensões, são dados por $E = \hbar^2 J(J+1)/2I$, com degenerescência $2J+1(M = -J, -J+1, \ldots, J-1, J)$. Considere um gás de N rotores. Escreva a função de partição e calcule a energia média em função da temperatura. Obtenha o limite de altas temperaturas para verificar se seu resultado está correto.

- $$\zeta = \sum_J (2J+1)\exp\left(-\beta\hbar^2 J(J+1)/2I\right)$$
- A energia média será
$$\overline{E} = \frac{\sum_J (2J+1)\,\hbar^2 J(J+1)/2I\ \exp\left(-\beta\hbar^2 J(J+1)/2I\right)}{\sum_J (2J+1)\exp\left(-\beta\hbar^2 J(J+1)/2I\right)}$$
- Em altas temperaturas podemos substituir a soma por uma integral
$$\zeta = \int_0^\infty (2j+1)\ \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2}{2I}j(j+1)\right)dj = \frac{2I}{\hbar^2}kT$$
- Logo $\overline{E} = NkT$

3 3ª Questão

Considere um arranjo de N átomos de spin $1/2$, na presença de um campo magnético H, em contato com um banho térmico à temperatura T. Encontre a magnetização média e a entropia em função da temperatura. Encontre os valores limites da magnetização para baixas e altas temperaturas.

- $$\zeta = e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}$$
- $$m = \left(\frac{1}{\zeta}\right)\mu e^{\beta\mu H} - \mu e^{-\beta\mu H} = \mu\tanh\frac{\mu H}{kT}$$
- $$s = k(\ln\zeta + \beta\overline{\varepsilon}) = k\left[\ln\left(2\cosh\frac{\mu H}{kT}\right) - \frac{\mu H}{kT}\tanh\frac{\mu H}{kT}\right]$$
- em altas temperaturas $x = \frac{\mu H}{kT}$ pequeno $\rightarrow \tanh(x) \approx x$; logo
$$m \approx \frac{\mu^2 H}{kT}$$
- em baixas temperaturas
$$m \approx \mu$$

4 4ª Questão

Encontre a distribuição de velocidades $F(v)$ de um gás ideal clássico, a temperatura constante T. Esboce o gráfico.

- Seja $f(\vec{r},\vec{v})$ o número de partículas por unidade de volume, com posição entre $\vec{r}$ e $\vec{r}+d\vec{r}$ e velocidades entre $\vec{v}$ e $\vec{v}+d\vec{v}$.

$$f(\vec{r},\vec{v}) = CNe^{-\beta\frac{mv^2}{2}}d^3\vec{r}d^3\vec{v}$$

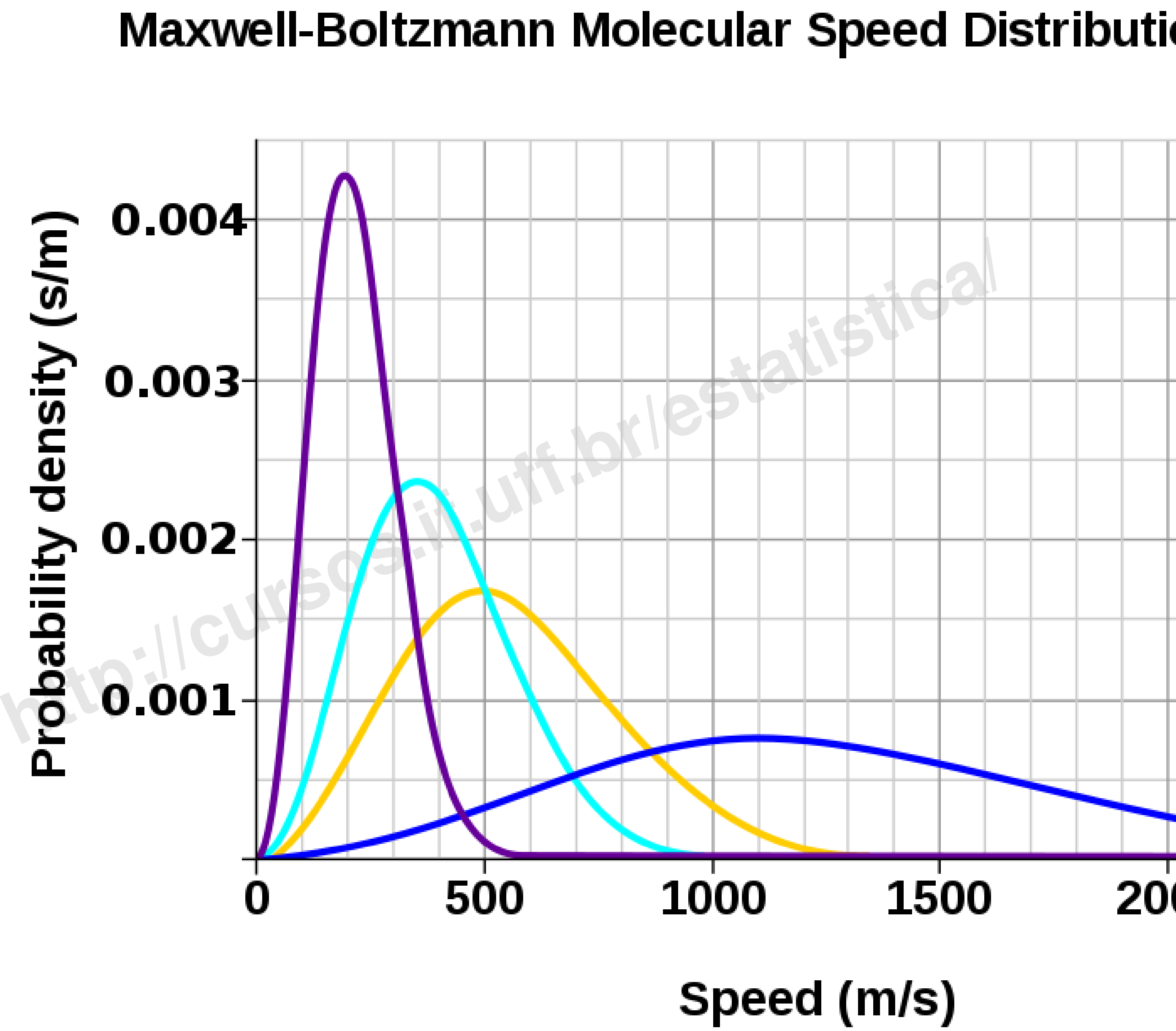
- C é obtido, integrando f para todos os valores de $\vec{r},\vec{v}$

$$f(\vec{r},\vec{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}d^3\vec{r}d^3\vec{v}$$

- A função desejada é

$$F(v)dv = 4\pi v^2 f(v)dv = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}dv$$

-


Maxwell-Boltzmann Molecular Speed Distributi
Probability density (s/m)
0.004
0.003
0.002
0.001
0
500
1000
1500
200
Speed (m/s)
http://cursos.if.uff.br/estatistica/